

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 78

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 задания повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2. Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 записан под правильным номером.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

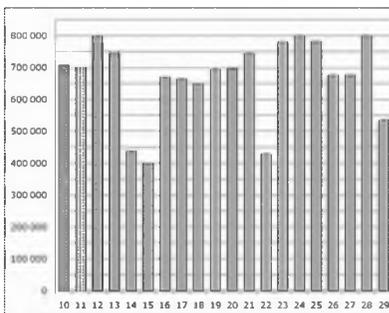
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке. Единицы измерения писать не нужно.

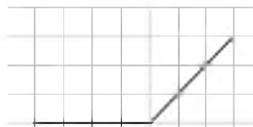
Часть 1

1. В сентябре 1 кг огурцов стоил 50 рублей, в октябре огурцы подорожали на 15%, а в ноябре еще на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг огурцов после подорожания в ноябре?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа в указанный период количество посетителей сайта РИА Новости впервые приняло наибольшее значение.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён угол. Найдите его градусную величину.

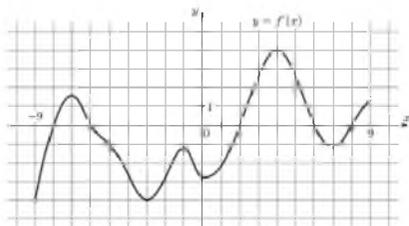


4. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

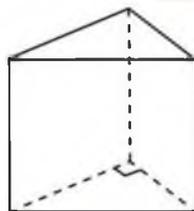
5. Решите уравнение $x^2 + 1 = (x + 1)^2$.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 9)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



8. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$

10. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое

сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

11. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-10}$ на отрезке $[8; 11]$

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение

$$(2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2) \log_7 (-\sin x) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Высота SH правильной треугольной пирамиды $SABC$ относится к высоте основания ABC как $4 : 9$. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $3 : 5$, считая от точки H .

б) Найдите объём меньшей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α , если сторона основания пирамиды равна 6 .

15. Решите неравенство:

$$\log_{2x+2}(2x-5)^2 \leq 2\log_{2x+2}(x+1).$$

16. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A . Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M .

а) Докажите, что M — середина AB .

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AP , если радиус большей окружности равен 13 , а $OM = 5$.

17. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь нарастить сумму налоговых поступлений, увеличило налог вдвое (до $2t_0$ рублей за единицу товара), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после такого увеличения, чтобы добиться максимальных налоговых поступлений, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства составляет $10\,000 - 2t$ единиц и это число положительно?

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 3a)x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?